Predavanje 8

METODA MONTE-CARLO

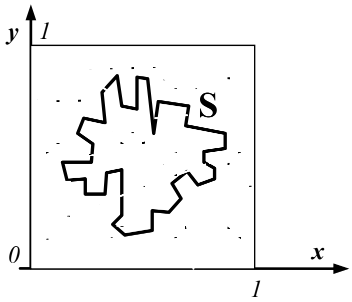
Von Neumann i Ulam, s kraja četrdesetih godina, su rešavajući probleme velike kompleksnosti, ustanovili da se rezultati ne mogu dobiti analitičkim putem, a sprovođenje eksperimenata bi bilo veoma skupo, pa su pristupili korišćenju Monte Karlo tehnike. Tako su došli do matematičkih rešenja determinističkih problema simulacijom stohastičkih procesa, koji su imali verovatnosnu raspodelu koja zadovoljava matematičke relacije datog determinističkog problema. **Monte Carlo simulacija** odslikava stohastičke procese kod kojih **vreme ne igra ulogu**. Ona se označava i kao **metoda ponovljenih pokušaja**.

Numeričke metode, poznate kao Monte Carlo metode, mogu se slobodno definisati kao **statistički simulacioni metodi**, kod kojih se **upotrebljavaju nizovi slučajnih brojeva za izvršenje simulacije**. Monte Carlo metode poslednjih nekoliko decenija dobija status potpuno zaokružene numeričke metode sposobne za rešavanje najkompleksnijih zahteva. Monte Carlo metodi su prvobitno poznati kao ”statistička uprošćavanja”.

Naziv **”Monte Carlo”**, popularizovan od strane prvih istraživača u ovoj oblasti (**Stanislaw Marcin Ulam, Enrico Fermi, John von Neumann i Nicholas Metropolis**), je proistekao iz naziva čuvenog **kazina u Monaku**. Korišćenje **slučajnosti** i procesa **ponavljanja** u metodi je analogno aktivnostima koji se događaju u kazinu. Kako su za dobijanje dovoljno tačne ocene tražene veličine, potrebna izračunavanja za **veoma veliki broj posebnih slučajeva** i odgovarajuća **statistička obrada ogromnog numeričkog materijal**a to je efektivna primena metode Monte Carlo omogućena tek pojavom elektronskih računara.

Monte Carlo metoda zahteva da se **fizički sistem** opiše **funkcijama gustine verovatnoće**. Kada su poznate ove funkcije, Monte Carlo simulacija se nastavlja slučajnim izborom vrednosti iz funkcija. Potom se **izvrše mnoge simulacije** (eksperimenti, probe), a za **rešenje se uzima prosečan rezultat svih simulacija** (može biti jedno ispitivanje, a možda i milion ispitivanja). Pri rešavanju različitih problema kod kojih je teško doći do analitičkih izraza koriste se računski metodi, modeliranjem slučajnih promenljivih. Sledeći primer ilustruje ideju tih metoda, kojima pripada i metoda Monte Carlo.

Primer 1: Potrebno je izračunati površinu ravne figure S. To može biti potpuno proizvoljna figura koja je ograničena krivom linijom; može biti definisana grafički ili analitički, može biti cela figura ili figura sačinjena od nekoliko delova. Pretpostavimo da je S prostor, sl.1, sadržan u jediničnom kvadratu.

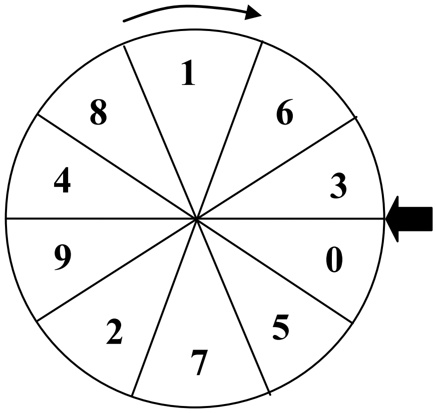


Sl.1. N slučajnih tačaka u jediničnom kvadratu

N slučajnih tačaka nalazi se u kvadratu. Označimo broj tačaka koje su sadržane u figuri S sa N', a sa m(S) površinu figure S. Geometrijski je očigledno da odnos površina figure S i jediničnog kvadrata približno jednak odnosu N'/N, odnosno m(S) je približno jednak N'/N. Što je veće N, veća je i tačnost ove procene.

Ovaj primer ima više ilustrativan nego praktičan značaj. Za izračunavanje površina ravnih figura koriste se **tačniji metodi (kvadratne formule)** koji su i komplikovanije. Međutim, kada je u pitanju **izračunavanje zapremina figura u prostoru sa više dimenzija** metod Monte Carlo predstavlja jedini način za rešavanje takvih problema.

Izbor tačaka u kvadratu na slučajan način se može realizovati pomoću **tehničkih uređaja koji formiraju (generišu) slučajne brojeve**. Ti uređaji se nazivaju **generatori** slučajnih brojeva. Najprostiji uređaj te vrste je **drveni ili metalni disk** (točak) koji se okreće oko svoje osovine. Ovaj uređaj se još naziva i **rulet** i definiše princip rada na kome se izgrađeni i savršeniji elektronski uređaji koji se danas koriste kao generatori slučajnih brojeva. Na sl.2 prikazan je generator slučajnih brojeva.



Sl.2. Rulet – generator slučajnih brojeva

Osnovna ideja metoda Monte Carlo sastoji se u sledećem: Da bi približno izračunali neku skalarnu veličinu **a** (površina figure u ravni, zapremina tela u prostoru, vrednost određenog integrala i dr.) treba poći od slučajne promenljive X čije je matematičko očekivanje EH jednako **a**. Odredivši N nezavisnih vrednosti (realizacija) $x_1,x_2,\ldots,x_N$ slučajne promenljive H, za približnu vrednost veličine **a** može se uzeti **aritmetička sredina** vrednosti $x_1,x_2,\ldots,x_N$:

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{\mathrm{N}}$$

Oblast primene metode Monte Carlo

Monte Carlo metoda se primenjuje u raznim simulacijama koje koriste slučajne brojeve. Najčešće se metoda koristi samo za statičke tipove simulacija kod kojih se u rešavanju problema koristi stvaranje uzoraka iz raspodela slučajnih promenljivih. Pri tome, problemi mogu biti bilo determinističkog, bilo stohastičkog karaktera.

Razlikujemo sledeće primene Monte Carlo simulacije:

1. **Deterministički problemi koje je teško ili skupo rešavati.** Tipičan primer je korišćenje ovog metoda za **izračunavanje određenih integrala** koji se ne mogu rešiti analitički. Monte Carlo metoda se u ovom slučaju koristi za generisanje niza slučajnih

tačaka (x_j,y_j) sa jednakim verovatnoćama unutar određenog pravougaonika. Zatim ispituje koliko je generisanih tačaka sadržano u površini koja odgovara integralu.

2. **Složeni fenomeni koji nisu dovoljno poznati.** Ovo je druga klasa problema koje se rešavaju uz pomoć Monte Carlo metoda. Ove probleme karakteriše to da **nije poznat način uzajamnog delovanja između elemenata**, već su **poznate samo verovatnoće njihovog ishoda.** Verovatnoće se koriste za izvođenje niza eksperimenata koji daju uzorke mogućih stanja zavisnih promenljivih. Statističkom obradom rezultata dobija se raspodela verovatnoća zavisnih promenljivih koje su od interesa. Društveni i ekonomski problemi se rešavaju na ovaj način.

3. **Statistički problemi koji nemaju analitička rešenja.** Statistički problemi bez analitičkog rešenja (npr. procene kritičnih vrednosti ili **testiranje novih hipoteza**) su jedna specifična klasa problema koji se rešavaju Monte Carlo simulacijom. Rešavanje takvih problema takođe se zasniva na generisanju slučajnih brojeva i promenljivih.

Primena MONTE CARLO *metode u logistici*

Jedan od razloga široke primene ove metode je činjenica da veliki deo važnih problema iz ove oblasti **nije moguće rešiti analitičkim putem**. Drugi razlog je to što je relativno **lako shvatiti osnovne koncepte ove metode i primeniti ih** u praksi. **U logistici** se metoda Monte Carlo koristi u cilju izučavanja i opisivanja **ponašanja sistema** koji je predstavljen **funkcijama slučajnih promenljivih**. Suština metode je korišćenje slučajnih brojeva. Slučajni broj je realizacija slučajne promenljive generisane na računaru iz uniformne raspodele u oblasti [0,1]. Tipičan primer korišćenja ove metode je sledeća situacija:

Date su slučajne promenljive $X_1, X_2, ... X_N$ sa poznatim funkcijama raspodele $F(X_i)$. Neka je $Y=N(X_1,X_2,...X_N)$, gde je N neka funkcija. Kada je funkcija N složena funkcija (ne mora biti), veoma je teško, a često i nemoguće dobiti podatke o raspodeli N analitički. Monte Carlo metoda se ovde koristi za dobijanje raspodele N odnosno za analizu dobijenih podataka.

Osnovni koraci u relizaciji metode Monte Carlo korišćenjem nekog programa su:

1. Generisanje posmatranih ulaznih promenljivih.
2. Izračunavanje izlaza (output) korišćenjem ulaza (input) kroz zadatu funkciju.
3. Ponavljanje izračunavanja mnogo puta.
4. Analiza dobijenih izlaznih veličina.

Monte Carlo metoda se može rešavati u **EXCEL-u** jer ovaj softer nudi široke mogućnosti kada je u pitanju unos podataka (preko **250 ugrađenih funkcija**) i obrada rezultata (grafičko prikazivanje).

Primer: 1. Monte Carlo simulacija predviđanja prodaje

Scenario: Kompanija **MyCompany** želi da sazna koliko će njihov novi proizvod biti profitabilan na tržištu s'obzirom da na tržištu postoje mnoge neizvesnosti koje su povezane sa veličinom tržišta, troškovima i prihodima.

Cilj: Korišćenjem Monte Carlo simulacije se dolazi do **procene profita, određivanja rizika**.

Realizacija Monte Carlo simulacije biće izvedena u 4 koraka:

1. Pravljenje modela:

Kreiranje modela predviđanja prodaje počećemo sa postavljanjem osnovne jednačine:

PROFIT = PRIHOD - TROŠKOVI

I prihod i troškovi su neizvesni parametri, pa ćemo problem razložiti na osnovne parametre što je i svrha razvijanja modela. U idealnom slučaju bi svi ulazi (input) bili nezavisni. Pretpostavimo da se **prihod** računa tako što se **broj prodaja** (**S**) pomnoži sa **profitom po prodaji** (**P**) koja je rezultat individualne kupovine proizvoda, tako da je sada **PRIHOD = S*P**. Profit po prodaji (**P**) uzima u račun prodajnu cenu, inicijalne (početne) troškove proizvođača ili prihod od prodaje na veliko, i druge platne transakcije (kreditne kartice, špedicije i dr.). Kada se to uzme u obzir pretpostavimo da **P** fluktuiše između 47 i 53 dinara.

Broj prodaja (**S**) se može ostaviti kao primarna promenljiva, ali neka u ovom primeru pretpostavimo da kompanija stvara prodaju kroz **purchasing leads**- ove. **Lead** je **identitet osobe** ili nekog entiteta koji je potencijalno zainteresovan za kupovinu proizvoda ili određene usluge. Broj prodaja po mesecu (**S**) se dobija kada se **broj lead-ova po mesecu** (**L**) pomnoži sa **ratom konverzije** (**R**). **Rata konverzije** je procenat lead-ova koji rezultuju u prodaji, tj. način da se izmeri efektivnost prodajnog procesa. Tako da na kraju za jednačinu prihoda dobijamo:

PRIHOD = L*R*P

Što se tiče troškova, može se uzeti da su troškovi jednaki zbiru **fiksnih troškova** (**H**) i ukupnih **troškova lead**-ova. Neka **trošak pojedinačnog lead-a** (**C**) varira između 0.2 i 0.8 dinara. Prema podacima istraživanja tržišta kompanija **MyCompany** očekuje da broj lead-ova po mesecu (**L**) varira između 1200 i 1800. Konačni **model kompanije** za predviđanje prodaje je:

$$\boxed{\text{PROFIT} = L*R*P - (H+L*C)}$$

Ulaz (input): ulazne promenljive u Monte Carlo simulaciji su **neizvesni parametri x_i.**

$$X_1 = \boldsymbol{L}, \quad X_2 = \boldsymbol{C}, \quad X_3 = \boldsymbol{R}, \quad X_4 = \boldsymbol{P}$$

Izlaz (output): izlazna promenljiva je Y i reprezentuje moguće profite.

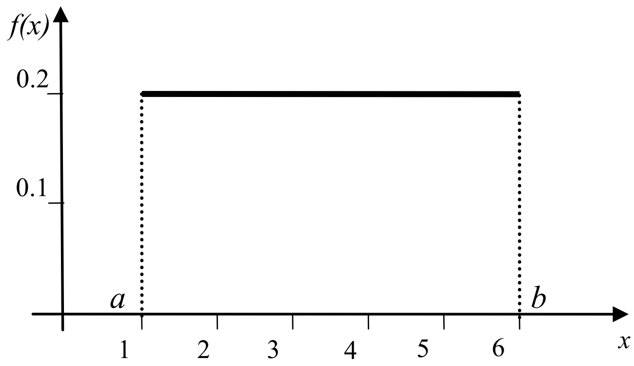
Nakon rastavljanja na osnovne parametre uočava se da broj lead-ova (**L**) figuriše i u prihodu i u troškovima. Prema tome, prihodi i troškovi nisu nezavisni.

2. Generisanje slučajnih ulaza

Generisanje niza slučajnih brojeva je osnova metode Monte Carlo. Za ovu primenu, u najjednostavnijem slučaju **korističemo uniformnu raspodelu** koja predstavlja četiri neizvesna parametra (**L**, **C**, **R**, **P**). Za uniformnu (ravnomernu) raspodelu važi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$

Kaže se da neprekidna slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $U(a,b)$, ako X uzima samo vrednosti između a i b.



Sl.3. Grafik jednake (ravnomerne) raspodele

Srednja vrednost odnosno očekivana vrednost se računa po obrascu:

$$E(x) = \frac{a+b}{2},$$

Varijanca (mera rasipanja vrednosti jednog niza merenja) se računa po obrascu:

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ravnomerna raspodela je pogodna za primenu kada proces nije dovoljno poznat, ali se minimum i maksimum mogu proceniti (tolerancije, vremena čekanja).

Vrednosti za ulazne veličine date su tabeli T-3.

ULAZNE VELIČINE (input)		Tabela T-3	
	nominalna vrednost	MIN	MAX
broj lead-ova po mesecu (**L**)	1500	1200	1800
trošak pojedinačnog lead-a (**C**) din	0.5	0.2	0.8
rata konverzije (**R**) %	3%	1%	5%
profit po prodaji (**P**) din	50	47	53
fiksni troškovi (**H**) din	800		

3. Izračunavanje modela

Uzmimo da je broj izračunavanja **n = 40.** Ovo je prilično mali broj izračunavanja kada je u pitanju Monte Carlo simulacija, ali je za ovaj primer dovoljan broj za vršenje analize rezultata. U programu napisanom u **EXCEL**-u broj izračunavanja se može proizvoljno izabrati, a izvršena je analiza sa 5000 ponavljanja. U tabeli T-4 prikazani su slučajne vrednosti za ulazne veličine **L**, **C**, **R**, **P** i **H** i rezultati koji predstavljaju ostvarene profite.

Za izračunavanje profita koristi se navedena formula sa ponavljanjem n puta.:

PROFIT = L*R*P – (H+L*C) ,

IZRAČUNAVANJE MODELA				Tabela T-4	
ULAZNE VELIČINE (input)					***IZLAZ (output)***
L	C	R	P	H	PROFIT
1512.54	0.62	1.61%	47.40	*800*	40.38

1798.10	0.28	1.37%	48.09	*800*	760.16
1635.53	0.78	1.60%	48.13	*800*	515.28
1772.71	0.30	4.25%	47.83	*800*	855.80
1666.18	0.64	4.83%	51.45	*800*	1319.29
1438.41	0.73	3.19%	51.67	*800*	2469.54
1486.76	0.71	2.57%	47.75	*800*	977.28
1485.78	0.38	2.30%	50.24	*800*	1772.94
1202.39	0.68	3.88%	51.76	*800*	1376.20
1672.23	0.36	2.86%	47.21	*800*	734.60
1212.71	0.21	4.58%	48.70	*800*	133.06
1702.25	0.67	2.90%	49.53	*800*	714.09
1585.86	0.26	2.02%	47.71	*800*	-1038.48
1499.90	0.56	2.19%	49.77	*800*	2219.53
1410.53	0.42	3.04%	49.15	*800*	8.60
1764.24	0.24	2.59%	51.09	*800*	1336.97
1657.83	0.67	1.72%	49.05	*800*	-1281.70
1504.31	0.28	3.10%	51.71	*800*	1855.12
1368.78	0.55	2.80%	50.03	*800*	-965.57
1757.44	0.47	3.74%	52.71	*800*	1509.70
1698.65	0.56	1.80%	50.14	*800*	1721.71
1416.30	0.28	4.43%	49.31	*800*	1196.47
1508.66	0.58	1.71%	48.12	*800*	3351.80
1719.53	0.80	1.03%	48.56	*800*	-254.19
1297.46	0.76	1.09%	47.04	*800*	43.34
1446.20	0.59	3.24%	51.64	*800*	1551.18
1714.66	0.73	2.57%	47.80	*800*	2824.74
1621.66	0.34	2.69%	51.06	*800*	2084.10
1425.78	0.51	3.51%	48.91	*800*	1099.14
1577.72	0.46	4.77%	51.17	*800*	294.81
1326.21	0.38	4.31%	47.06	*800*	572.48
1308.10	0.74	1.41%	51.95	*800*	1835.36
1356.37	0.56	3.28%	51.54	*800*	2444.16
1328.64	0.28	4.20%	48.58	*800*	-177.09
1574.37	0.54	2.04%	48.36	*800*	-164.13
1348.44	0.33	4.43%	51.12	*800*	1347.96
1313.64	0.48	1.87%	47.50	*800*	-608.91
1367.26	0.28	3.88%	52.99	*800*	2299.04
1282.66	0.64	2.02%	49.08	*800*	321.12
1690.17	0.39	2.04%	50.73	*800*	360.53

4. Analiza rezultata

Poslednji korak u realizaciji Monte Carlo metode u simulaciji predviđanja prodaje je analiza dobijenih rezultata. Za prikazivanje rezultata koristi se **grafički metod**, a sastoji se u

kreiranju histograma. Histogram je grafički prikaz tabele koji pokazuje koliki je opseg događaja koji pripadaju svakoj od nekoliko mogućih kategorija.

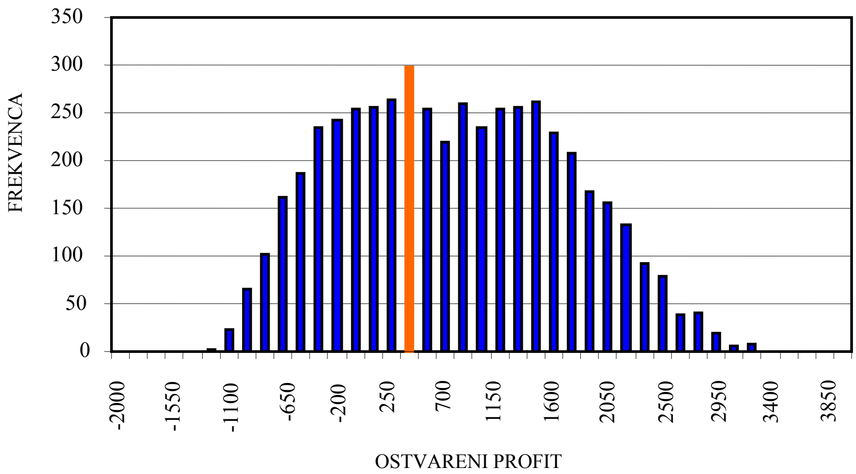
Jedna od osnovnih formi histograma se dobija razdvajanjem celokupnog područja sa podacima **u podeoke (eng. bins)** jednake veličine koji se zovu **klase** (vrste, eng. Class). Zatim se svaki podeok računa broj tačaka, iz dobijenih rezultata, koje pripadaju datom podeoku, tj. vrši se vrednovanje podeoka. Tako je:

- Vertikalna osa: frekvencija (tj., brojčana veličina svakog podeoka)
- Horizontalna osa: odgovarajuća promenljiva

Dakle, y-osa predstavlja **frekvencu** (frekvenca događaja I je broj n_i i pokazuje koliko puta se događaj dogodio u eksperimentu ili analizi), x-osa predstavlja zasebne kategorije (u našem slučaju to je suma ostvarenog profita). Histogram je jedan od osnovnih alata za prikupljanje i analizu podataka, kao i za donošenje odluka.

Na sl.4 prikazan je histogram na osnovu dobijenih rezultata.
Sa histograma se mogu uočiti mnoge informacije:

- ostvariće se pozitivan profit u većini slučajeva,
- neizvesnost je prilično visoka i što se tiče profita varira između -1000 i 3400,
- raspodela liči na normalnu raspodelu, iako ne izgleda kao prava normalna raspodela,
- ne izgleda da ima odsecanja, mnogostrukih ponavljanja i dr.



Sl.4. Histogram dobijenih rezultata

5. Monte Carlo statistička obrada

U cilju potpune analize rezultata, uobičajeno je da se prikažu podaci o srednjoj vrednosti, medijani, standardnoj devijaciji, intervalu, standardnoj grešci, ali i ostali podaci statistike sve u cilju kvalitetnije analize rezultujuće raspodele.

Srednja vrednost, mod i medijana statistički opisuju centralnu težnju (tendenciju) ili ”lokaciju” raspodele. Srednja vrednost (mean) je jednostavno prosečna vrednost svih merenja. Takođe se još naziva i ”prvi moment” raspodele. Računa se po formuli:

$$\boxed{\overline{x} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{n},}$$

gde su: x_i – vrednost dobijena u i-tom izračunavanju i n broj izračunavanja.

Medijana je broj koji razdvaja gornju polovinu dobijenih rezultata od donje polovine istih. Ako sortiramo rezultate od najmanjih do najvećih, medijana je "sredina" vrednosti ili 50-ti procenat, označavajući da su 50% rezultata simulacije manji od medijane. Ako postoji podjednak broj tačaka koje reprezentuju podatke, onda je medijana sredina između dve srednje tačke. Ekstremne vrednosti imaju veliki uticaj na srednju vrednost, ali **medijana zavisi jedino od srednje tačke** (srednjih tačaka). Ovo svojstvo medijane čini je korisnom za opisivanje sredine (centra) **iskrivljenih raspodela**. Ako je raspodela simetrična (kao što je normalna raspodela), onda će srednja vrednost i medijana biti identični.

Mod je vrednost koja ima najveću frekvencu (najčešća vrednost).

Varijansa, standardna devijacija, interval i kvantili opisuju rasprostiranje podataka tj. predstavljaju mere odstupanja. **Varijansa** (disperzija) je mera rasipanja vrednosti jednog niza merenja i računa se:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}.}$$

Standardna devijacija je veličina koja pokazuje prosečnu udaljenost dobijenih vrednosti od srednje vrednosti. Ako su dobijeni podaci bliski srednjoj vrednosti, standardna devijacija će biti mala (bliža nuli). Ako su mnoge dobijene tačke koje reprezentuju dobijene rezultate mnogo različitije od srednje vrednosti, tada će standardna devijacija biti velika. I na kraju, ako su sve dobijene vrednosti jednake standardna devijacija je jednaka nuli. Standardna devijacija je kvadratni koren varijance pa se računa kao:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}.}$$

Standardna greška je količnik standardne devijacije i kvadratnog korena broja izračunavanja:

$$\boxed{\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.}$$

Interval (range) je broj koji se jednostavno dobija oduzimanjem minimalne vrednosti od maksimalne vrednosti. Uopšteno, može se definisati i kao dužina najmanjeg intervala koji sadrži sve podatke (raspon varijacije).

Kvantil raspodele vrednosti je broj x_p takav da je procenat **p** populacija vrednosti manji ili jednak x_p. Na primer, **.25 kvantil** (koji se označava i kao 25-i procentil ili "donji" kvartil) promenljive je veličina (x_p) tako da **25% vrednosti promenljive ide ispod te vrednosti**. Slično, postoji i .75 kvantil (75-i procentil ili "gornji" kvartil). Drugim rečima, kvantili su vrednosti numeričke promenljive koji niz uređen po veličini dele na q jednakih delova.

Maksimalna i minimalna vrednost su ekstremne vrednosti koje su dobijene u simulaciji. Što su ove dve vrednosti bliže, manje je rasipanje pa je srednja vrednost pouzdanija.

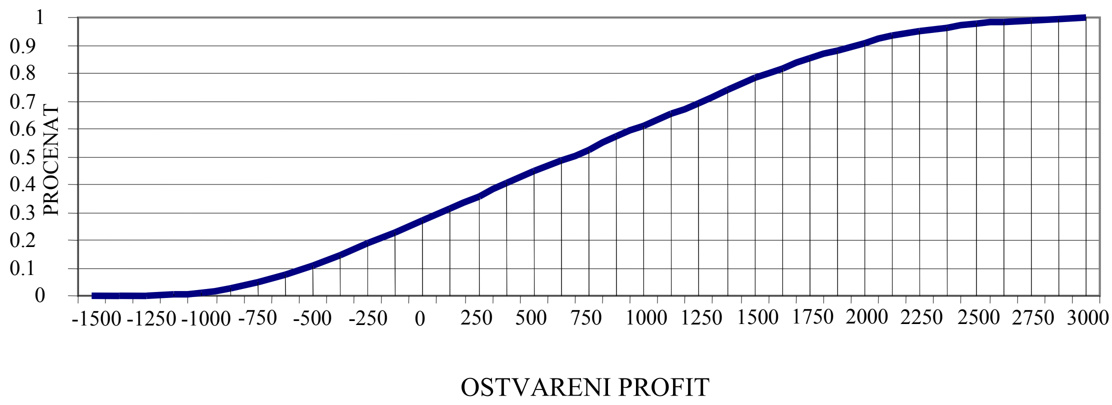
Iskrivljenost i zaobljenost služe za opisivanje oblika dobijene raspodele. To su veličine koje pokazuju kako su dobijene vrednosti raspoređene oko moda. Iskrivljenost je veličina (*skewness*) koja opisuje asimetriju raspodele u odnosu na srednju vrednost. Pozitivna vrednost ove veličine znači da raspodela ima veći ”rep” na desnoj strani (odnosno raspodela je okrenuta više ka pozitivnim vrednostima). Negativna vrednost ove veličine znači da je raspodela iskrivljena ulevo. Vrednost nula pokazuje da su vrednosti podjednako raspoređene sa obe strane moda.

Zaobljenost (kurtosis) je veličina koja opisuje šiljatost ili pljosnatost raspodele u odnosu na normalnu raspodelu tj. pokazuje koliko je dobijena raspodela uzana ili prostrana. Pozitivna vrednost zaobljenosti označava više šiljastu raspodelu i znači da je ta raspodela uža od normalne raspodele. Negativna vrednost označava više pljosnatiju ili prostraniju raspodelu. Normalna raspodela ima vrednost za zaobljenost nula.

U tabeli T-5 prikazani su dobijeni rezultati simulacije.

MONTE CARLO STATISTIČKE VREDNOSTI		Tabela T-5
STATISTIČKI KARAKTERISTIČNI BROJEVI		**DOBIJENE VREDNOSTI**
Broj izračunavanja (n)		*5000*
CENTRALNA TENDENCIJA	srednja vrednost	*688.23*
	medijana	*672.98*
	standardna greška	*13.08*
RASPROSTIRANJE VREDNOSTI	standardna devijacija	*925.46*
	maksimalna vrednost	*3351.81*
	minimalna vrednost	*-1281.48*
	interval	*4333.29*
	kvantil .25	*-42.03*
	kvantil .75	*1460.86*
OBLIK RASPODELE	iskrivljenost	*0.1093*
	zaobljenost	*-0.8619*

Histogram daje dobre podatke za analizu, ali u mnogim slučajevima potrebno je izračunati verovatnoću da posmatrana veličina (u ovom slučaju profit) bude ispod ili iznad ***određene vrednosti****, ili između postavljenih granica. U tom smislu razvija se grafik funkcije kumulativne distribucije. Na sl.5 prikazana je kumulativna funkcije dobijene raspodele.*



Sl.5. Kumulativna funkcija dobijene raspodele

Postupak: Sa slike se sada mogu jasno videti procenti i tačne vrednosti vezane za njih. **Na primer**, želimo da vidimo koji je procenat rezultata po kojima je profit negativan (ima oblik troška) i iznosi -750 dinara. Odgovor na to pitanje jednostavno dobijamo povlačenjem vertikalne linije sa apcise na kojoj stoji vrednost od -750. U tački u kojoj se seče ova vertikala sa funkcijom kumulativne raspodele, povlači se paralela sa x-osom i dobija određena vrednost na ordinati (u ovom slučaju 0.05 ili 5%). Slično, povlačenjem linije na podeoku sa vrednošću 2250, saznajemo da 95% rezultata imaju vrednost ispod 2300.

Potrebno je odgovoriti na još jedno važno pitanje: **Koje su granice centralnog intervala** od 95% (oblast u kome se nalazi 95% dobijenih rezultata) moramo pristupiti formiranju tog intervala. Odgovor na ovo pitanja daje važan statistički pregled koji opisuje prostiranje podataka. Za izračunavanje centralnog intervala koriste se kvantili (procentili), odnosno za izračunavanje centralnog intervala od 95% pristupa se izračunavanju **0.025-og i 0.975-og kvantila**. U tabeli T-6 prikazani su procentili za interval od 95%.

Tabela T-6
INTERVAL 95%
0.025 procentil = *-883.58*
0.975 procentil = *2443.08*

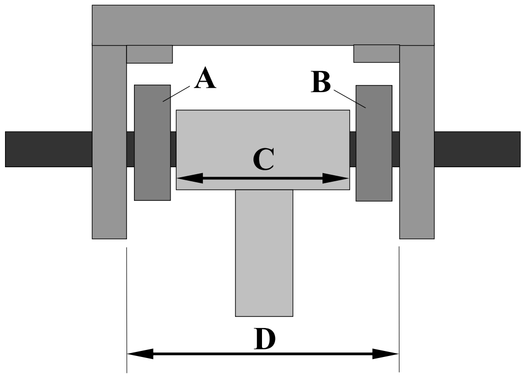
Primer: 2. Monte Carlo simulacija sklapanja delova

Scenario: Preduzeće XY, odnosno proizvodni pogon tok preduzeća želi da sazna koje bi trebalo da budu optimalne veličine za vrednost tolerancija u **sklapanju zgloba** koji se sastoji iz 4 dela. Ako su tolerancije delova A, B i C suviše velike, odnosno u zbiru (A+B+C) veće od vrednosti dela D, postupak montaže takvih delova se ne može izvršiti jer zazor tada ima negativnu vrednost, pa se takvi delovi ubrajaju u kategoriju nezavršene proizvodnje.

Cilj: Monte Carlo metodom utvrditi koji je procenat nezavršenih proizvoda sa zadatim tolerancijama. Ako su zadate tolerancije daju visok procenat nezavršene proizvodnje, proizvodni pogon treba pristupiti reviziji i propisati nove vrednosti za tolerancije, a nedostatak treba nadoknaditi organizovanjem dodatne proizvodnje.

1. Pravljenje modela

Formiranje zgloba vrši se sklapanjem četiri dela A, B, C i D prema skici datoj na sledećoj slici.



Sl.6 Zglob koji se sklapa

U preduzeću se planira da se tokom godine izradi 60.000 ovakvih zglobova, što znači 5.000 komada mesečno. Obzirom na činjenicu da ne postoje identično izrađeni delovi, u toku montaže se javlja i određen broj komada nezavršene proizvodnje. Nezavršena proizvodnja predstavlja gubitak za preduzeće jer takvi delovi nemaju ekonomsku vrednost, a sa druge strane stvaraju potrebu da se pokrene **dodatna proizvodnja** u cilju dopune (obezbeđenja) planirane stope proizvodnje.

U konačnom modelu preduzeća XY su:

Ulaz (input): vrednosti za tolerancije delova A,B,C i D.

Izlaz (output): r-rezultujuće tolerancije r = D – (A+B+C), I-broj komada koji se **ne mogu** sklopiti (nezavršena proizvodnja), a predstavlja sumu svih delova (zglobova) kod kojih u procesu montaže nije bio ispunjen uslov da je:

$$D - (A+B+C) > 0 .$$

2. Generisanje slučajnih ulaza

Ulazne veličine za formiranje ovog modela su vrednosti za veličinu delova A,B,C i D. Kako je reč o delovima koji se proizvode sa određenim zadatim tolerancijama (min.,max.) najpogodnije je koristiti uniformnu raspodelu za prikazivanje vrednosti tolerancija ulaznih veličina. Vrednosti za ulazne veličine date su u tabeli T-7.

ULAZNE VELIČINE (input)		Tabela T-7	
sastavni delovi	nominalna vrednost(cm)	MIN	MAX
A	*3*	*2.95*	*3.05*
B	*3*	*2.95*	*3.05*
C	*25*	*24.5*	*25.5*
D	*32*	*31*	*33*

3. Izračunavanje modela

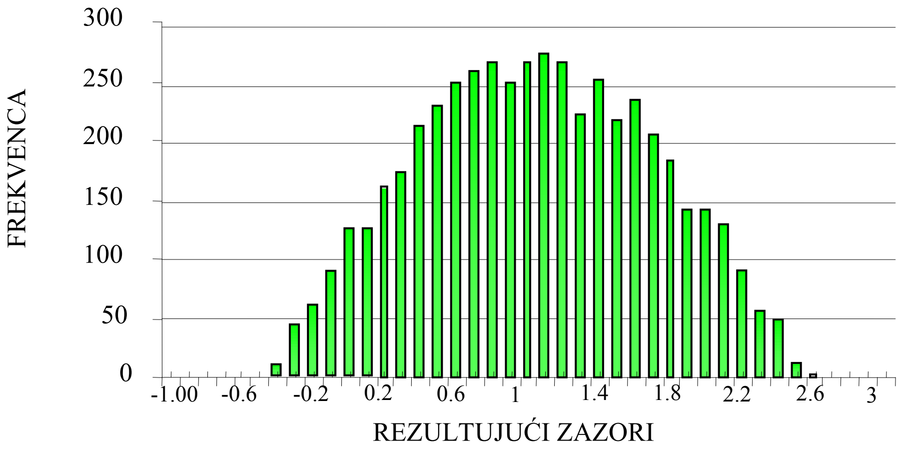
Za ovaj primer uzmimo da je broj izračunavanja n = 40. Ovo je mali broj izračunavanja ali u ovom obliku ima jednostavno ilustrativni karakter. U aplikaciji urađenoj u EXCEL-u broj izračunavanja jednak je planiranoj proizvodnji za mesec dana, znači n = 5000. U tabeli T-8 prikazane su slučajne vrednosti za ulaze A, B, C i D kao i rezultujuće vrednosti za r i I.

IZRAČUNAVANJE MODELA				Tabela T-8	
ULAZNE VELIČINE (input)				***IZLAZ (output)***	
A	B	C	D	r	I
2.955	2.982	25.045	31.113	0.131	
2.952	3.023	24.619	31.790	1.196	
2.987	3.018	24.910	31.358	0.443	
2.994	3.034	24.999	31.647	0.620	
2.970	3.040	25.165	32.303	1.129	
2.991	2.990	25.282	31.673	0.410	
3.044	2.957	25.256	32.918	1.661	
2.973	2.980	24.882	31.794	0.959	
2.993	3.022	24.627	32.147	1.505	
2.963	2.967	24.653	31.522	0.939	
3.024	2.982	25.418	32.816	1.392	
3.015	3.023	25.088	31.923	0.797	
2.984	2.966	24.920	32.860	1.991	
3.041	2.997	24.785	32.339	1.516	
3.006	2.993	25.314	32.994	1.682	
3.016	2.973	24.954	32.170	1.228	
2.991	3.021	25.266	31.433	0.156	
3.030	3.007	25.216	31.533	0.280	
3.021	3.034	25.370	32.858	1.433	*nezavršena proizvodnja: I =322*
2.967	2.982	25.318	31.204	-0.063	
2.995	2.958	24.707	31.455	0.795	
2.969	3.000	25.335	32.076	0.773	
2.990	3.050	25.483	32.069	0.546	
3.046	3.032	24.907	31.979	0.994	
3.021	2.961	24.803	32.805	2.020	
3.011	3.039	24.847	32.902	2.006	
3.041	3.010	24.941	31.091	0.099	
2.981	3.018	24.638	31.708	1.071	
2.955	3.001	25.363	32.901	1.582	
2.952	2.978	24.568	32.648	2.150	
3.042	2.987	24.605	32.668	2.033	
3.038	3.024	25.081	31.897	0.754	
3.046	2.962	24.670	31.771	1.091	
3.030	3.015	25.168	32.062	0.849	
3.034	3.029	24.863	31.062	0.136	
3.020	2.972	24.653	32.535	1.890	
3.026	3.024	24.948	31.351	0.353	
2.961	3.044	25.254	31.826	0.567	
3.025	3.038	24.801	32.304	1.439	
2.965	2.978	24.783	32.980	2.255	

4. Analiza podataka

Kao i u prethodnom primeru za analizu podataka koristićemo najpre histogram. Na sl.7 prikazan je histogram dobijenih rezultata.

Sl.7. Histogram rezultujućih zazora



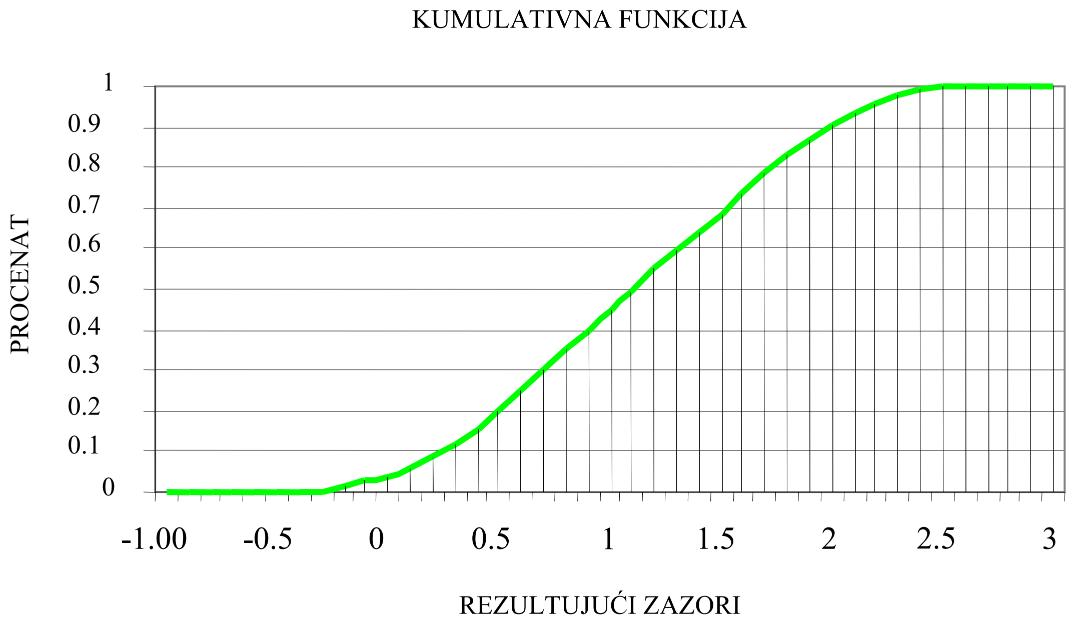
Sa histograma se uočavaju sledeći podaci:

- u većini slučajeva zazor ima pozitivnu vrednost, tj. postupak montaže se može realizovati,
- za zadate vrednosti tolerancija , zazor ne varira u velikim granicama i kreće se između -0.6 i 2.6,
- raspodela liči na normalnu, ali bez ekstremnih vrednosti u centralnom delu.

Kao i u prethodnom primeru, u cilju potpune analize rezultujućih podataka pristupiće se izračunavanju osnovnih statističkih parametara. Izračunavanje ovih parametara je izvršeno u EXCEL-u a dobijene vrednosti su prikazane u tabeli T-9.

MONTE CARLO *STATISTIČKI PARAMETRI*		Tabela T-9
STATISTIČKI KARAKTERISTIČNI BROJEVI		***DOBIJENE VREDNOSTI***
broj izračunavanja		*5000*
CENTRALNA TENDENCIJA	srednja vrednost	*1.004*
	medijana	*1.008*
	standardna greška	*0.009*
RASPROSTIRANJE VREDNOSTI	standardna devijacija	*0.647*
	maksimalna vrednost	*2.489*
	minimalna vrednost	*-0.481*
	interval	*2.969*
	kvantil .25	*0.498*
	kvantil .75	*1.493*
OBLIK RASPODELE	iskrivljenost	*0.022*
	zaobljenost	*-0.78*

Da bi utvrdili koji je procenat delova koji se ne mogu sklopiti, odnosno da bi odredili udeo nezavršene proizvodnje u ukupnoj proizvodnji pristupamo konstruisanju kumulativne funkcije dobijene raspodele. Na sl.8 data je ova funkcija.



Sl.8. Dobijena kumulativna funkcija

Najvažnije pitanje koje se postavlja je koliki je procenat delova koji se ne mogu sklopiti već je potrebno dodatno organizovati proces montaže. Sa slike se vidi da je sa prethodno zadatim tolerancijama, ovaj procenat nizak i ni u kom slučaju ne prelazi 10% i može se reći da iznosi 6%±1.

Izračunavanjem je dobijeno da je broj delova koji se ne mogu sklopiti I=322 komada, odnosno tačno 6.44% što se poklapa sa vrednostima koje se mogu pročitati sa slike.

Sve prethodno izračunate vrednosti odnosile su se za period od mesec dana. Na godišnjem nivou su dobijeni sledeći podaci. Izračunavanje je izvršeno u **EXCEL**-u, a podaci su prikazani u tabeli T-10.

STATISTIČKE VREDNOSTI PO MESECIMA		*Tabela T-9*
Mesec	**Broj delova koji se ne mogu sklopiti (kom.)**	**Procenat (%)**
januar	322	6.44
februar	317	6.34
mart	299	5.98
april	300	6
maj	297	5.94
jun	339	6.78
jul	320	6.4
avgust	343	6.86
septembar	296	5.92
oktobar	325	6.5
novembar	290	5.8
decembar	309	6.18
UKUPNO	3757	6.26

Dakle, broj delova koji se dodatno sklapaju iznosi 3757 što čini 6.26% planirane godišnje proizvodnje od 60.000 komada.

Obzirom da procenat nezavršenih delova ne prelazi 7%, da bi se podmirile potrebe potrošača potrebno je proizvesti dodatnih 4.050 zglobova. U tom slučaju se ostvaruje potpuna sigurnost kada je u pitanju obezbeđenje tražene količine.