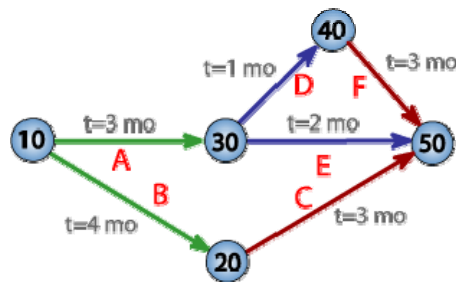


## MREŽNO PLANIRANJE

### *Analiza vremena po metodi PERT*

Metoda PERT (**P**roject **E**valuation and **R**eview **T**echnique) je metoda mrežnog planiranja kojom se određuje trajanje projekta. Projekat se realizuje skupom aktivnosti po nekom redosledu tih aktivnosti. U svakoj aktivnosti je određen *i*-početni događaj i *j*-završni događaj. Aktivnosti i događaji se mogu pokazati tabelarno ili mrežnim dijagramom. Metodu je predložio Booz\_Allen\_Hamilton 1958. godine za realizaciju Polaris programa razvoja podmornice za lansiranje balističkih projektila za Američko ministarstvo odbrane.



Slika 1. Mrežni dijagram sa pet ključnih događaja i 6 aktivnosti

Matematički model analize vremena realizacije projekta po metodi PERT je stohastičke prirode<sup>2)</sup>, što je posledica neizvesnosti vremenske procene trajanja pojedinih aktivnosti. Ta neizvesnost procene potiče, od prirode zadataka (najčešće razvojno-istraživačkih) koji se obuhvataju jednim mrežnim dijagramom. Polazni podaci, neophodni za analizu vremena su:

- $a_{ij}$  - optimističko vreme trajanja izvršenja pojedinih aktivnosti (*i* - *j*). To je najkraće vreme za izvođenje određene aktivnosti,
- $m_{ij}$  - najverovatnije vreme izvršenja aktivnosti (*i* - *j*)
- $b_{ij}$  - pesimističko vreme izvršenja aktivnosti i predstavlja najduže vreme za izvođenje aktivnosti.

Uz pretpostavku, da se trajanje svih aktivnosti ponaša po zakonu  $\beta$  - raspodele, a trenutak njihovog završetka, odnosno odigravanje pojedinih događaja po zakonu nor-malne raspodele, moguće je odrediti očekivano vreme  $(t_e)_{ij}$  trajanja aktivnosti (*i* - *j*), kao i njenu varijansu  $(\sigma^2)_{ij}$ , a na osnovu izraza:

$$(t_e)_{ij} = \frac{a_{ij} + 4 \cdot m_{ij} + b_{ij}}{6} \quad (1)$$

$$(\sigma^2)_{ij} = \left( \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2 \quad (2)$$

Sa dobijenim vrednostima za  $(t_e)_{ij}$  se potom vrši analiza vremena, tj. određuju se:

- najranije vreme nastupanja događaja:

$$(T_E)_j = \max_i \{ (T_E)_i + (t_e)_{ij} \} \quad (T_E)_1 = 0, \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad i < j \quad (3)$$



Povod za to je lansiranje ruskog satelita Sputnik 1, 4. Oktobra 1957.

- najkasnije vreme nastupanja događaja:

$$(T_L)_i = \min_j \{ (T_L)_j - (t_e)_{ij} \} \quad (T_L)_n = (T_E)_n, \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1), \quad i < j \quad (4)$$

- vremenska rezerva:  $(S)_i = (T_L)_i - (T_E)_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$

**Kritični put**, predstavlja niz međusobno povezanih aktivnosti koje se protežu između početnog i završnog događaja određenog mrežnim dijagramom, a u zbiru ima najduže vreme trajanja. Neka aktivnost ( $i - j$ ) ulazi u sastav kritičnog puta, samo tada, ako je za nju ispunjen uslov:

$$(T_L)_i - (T_E)_i - (t_e)_{ij} = 0 \quad (6)$$

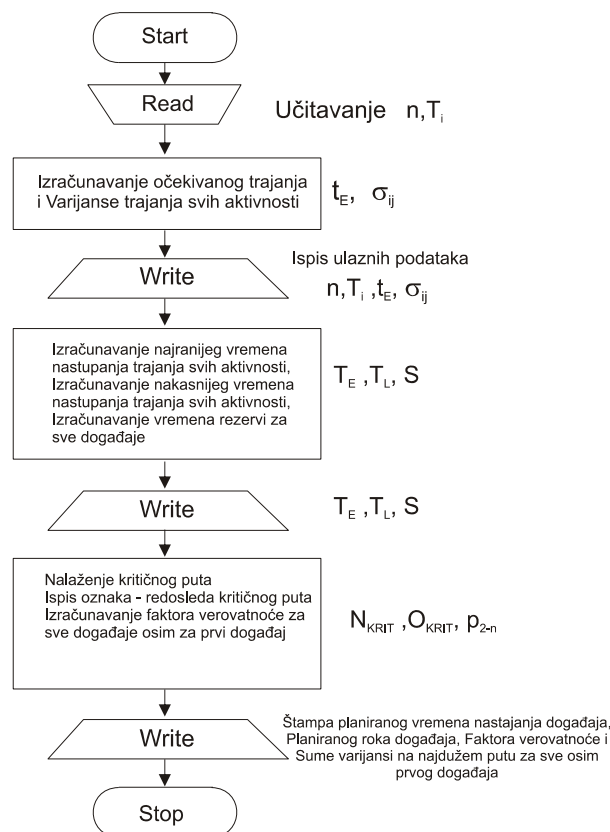
Na kraju analize vremena po metodi PERT, najčešće se vrši procena verovatnoće ispunjenja planiranih rokova odigravanja pojedinih događaja. Ako se planirani rok odigravanja događaja ( $i$ ) obeleži sa  $(T_S)_i$ , faktor verovatnoće  $(Z)_i$  koji mu odgovara se može izračunati na osnovu izraza:

$$(Z)_i = \frac{(T_S)_i - (T_E)_i}{(\Sigma \sigma^2)^{0.5}} \quad (7)$$

gde je  $\Sigma \sigma^2$  - zbir varijansi svih aktivnosti koje prethode događaju ( $i$ ), a leže na putu sa najdužim vremenom trajanja. Sama verovatnoća ispunjenja planiranih rokova, kao funkcija faktora verovatnoće, se najčešće određuje iz tablica ili grafički (što je znatno ređi slučaj).

## Algoritam

Algoritam metode za analizu vremena po metodi PERT se u osnovi bazira na programiranju izraza (1÷7). Algoritam se daje u obliku globalnog dijagrama toka (sl.2.) sa rasporedom aktivnosti:



**Slika 2.** Algoritam programa PERT

- 1) Na Univerzitetu u Beogradu (FON) 1989. predstavljen je program PERT. Napisani su u programskom jeziku FORTRAN, za operativni sistem RSX-11M računara PDP 11/70. Autor programa je Ilija Nikolić.

**Primer**

Analizom strukture projekta ustanovljena su karakteristična svojstva aktivnosti i ona su data u sledećoj tabeli:

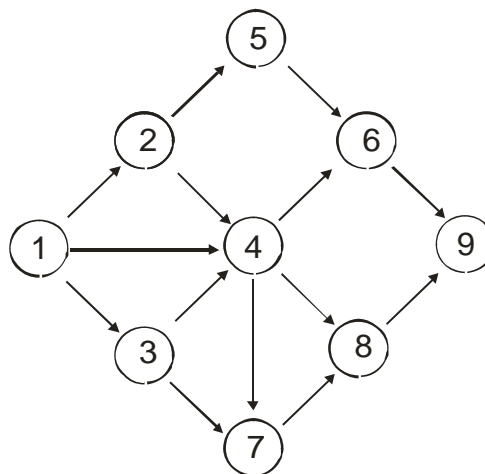
AKTIVNOSTI	ZAVISI OD	$a_{ij}$	$m_{ij}$	$b_{ij}$
A (1-2)	-	1	2	3
B (1-3)	-	2,5	4	5,5
C (1-4)	-	3	5	7
D (2-4)	A	2,5	4	5,5
E (2-5)	A	4	5	6
F (3-4)	B	2	4	6
G (3-7)	B	2	3	4
H (4-6)	D,C, F	2	3	4
I (4-7)	D,C, F	4	7	10
J (4-8)	D,C,F	1,5	2	2,5
K (5-6)	E	0,5	1	1,5
L (6-9)	K,H	4	5	6
M (7-8)	G,I	1,5	3	4,5
N (8-9)	J,M	2,5	4	5,5

Potrebno je:

- Nacrtati mrežni dijagram projekta
- Numerisati događaje prema pravilu Fulkerson-a
- Izvršiti analizu vremena projekta
- Odrediti kritični put
- Odrediti faktore verovatnoća pojedinih događaja za sledeće podatke o njihovim planiranim rokovima odvijanja:

DOGAĐAJ	2	3	4	5	6	7	8	9
$(T_s)_i$	3	4	6	8	12	15	19	22

**Rešenje:** a,b:



**Slika 3.** Mrežni dijagram projekta:

c), d) i e): Podaci iz teksta zadatka su dobijeni iz programa PERT, sa rešenjem:

I	J	AT(I,J)	MT(I,J)	BT(I,J)	ET(I,J)	SIG(I,J)
1.000	2.000	1.000	2.000	3.000	2.000	0.111
1.000	3.000	2.500	4.000	5.500	4.000	0.250
1.000	4.000	3.000	5.000	7.000	5.000	0.444
2.000	4.000	2.500	4.000	5.500	4.000	0.250
2.000	5.000	4.000	5.000	6.000	5.000	0.111
3.000	4.000	2.000	4.000	6.000	4.000	0.444
3.000	7.000	2.000	3.000	4.000	3.000	0.111
4.000	6.000	2.000	3.000	4.000	3.000	0.111
4.000	7.000	4.000	7.000	10.000	7.000	1.000
4.000	8.000	1.500	2.000	2.500	2.000	0.028
5.000	6.000	0.500	1.000	1.500	1.000	0.028
6.000	9.000	4.000	5.000	6.000	5.000	0.111
7.000	8.000	1.500	3.000	4.500	3.000	0.250
8.000	9.000	2.500	4.000	5.500	4.000	0.250

DOGAĐAJ J	TE(J)	TL(J)	SE(J)
1	0.000	0.000	0.000
2	2.000	4.000	2.000
3	4.000	4.000	0.000
4	8.000	8.000	0.000
5	7.000	16.000	9.000
6	11.000	17.000	6.000
7	15.000	15.000	0.000
8	18.000	18.000	0.000
9	22.000	22.000	0.000
KRITICNI PUT	1 3 4 7 8 9		

DOGAĐAJ	T <sub>E</sub>	T <sub>S</sub>	SIGTE	Z
2	2.000	3.000	0.111	3.000
3	4.000	4.000	0.250	0.000
4	8.000	6.000	0.694	-2.400
5	7.000	8.000	0.222	2.121
6	11.000	12.000	0.806	1.114
7	15.000	15.000	1.694	0.000
8	18.000	19.000	1.944	0.717
9	22.000	22.000	2.914	0.000

### Komentar izlaznih rezultata

Izlazni rezultati su štampani u formi koju daje računar. Najpre su dati u tabelarnoj formi ulazni podaci za:

$$AT(I,J) = a_{ij}; \quad MT(I,J) = m_{ij}; \quad BT(I,J) = b_{ij};$$

Pored ovih podataka (u istoj tabeli) su date i izračunate vrednosti za:

$$ET(I,J) = (t_e)_{ij}; \quad SIG(I,J) = (\sigma_e)_{ij}^2$$

Potom se daju i rezultati:

$$TE(J) = (T_E)_j; \quad TL(J) = (T_L)_j \quad i \quad SE(J) = S_j$$

Na osnovu tih rezultata može se odrediti i kritični put, koji se konstatuje brojevima pojedinih događaja. Na kraju se vrši proračun faktora verovatnoće odigravanja pojedinih događaja, za koji se daju, najpre ulazni podaci za:

$$(TE) = (T_E)_j; \quad TS = (T_S)_j; \quad SIGTE = \Sigma \sigma^2; \quad Z = (Z)_j$$

## Literatura

1. S.Krčevinac, Petrić, J., M.Čupić, I.Nikolić: ALGORITMI I PROGRAMI IZ OPERACIONIH ISTRAŽIVANJA, Naučna knjiga Beograd, 1989.
2. G.Courter, A.Marquis: MASTERING Microsoft PROJECT 2000, Sybex 2000.

```
C      TEHNIKA MREZNOG PLANIRANJA - PERT METODA
DIMENSION C(500,7), KRPUT(500), SIGTE(500), TS(500)
DIMENSION TE(500), TL(500), SE(500), Z(500)
INTEGER KRPUT, FLAG(500)
REAL IME(20)
LOGICAL*1 NASLOV(13), LST(4), FILE(17), BL, DAT(4)
DATA BL / ' ', LST(1) / ' ', LST(2) / 'L', LST(3) / 'S', LST(4) / 'T' /
DATA FILE(1) / 'P', FILE(2) / 'R', FILE(3) / 'I', FILE(4) / ' ' /
DATA DAT / ' ', 'D', 'A', 'T' / C
CALL ASSIGN (3, 'T1: ')
CALL CIST
*
TYPE 200
200  FORMAT ('NALAZITE SE U PROGRAMU ANALIZE PROJEKTA PERT METODOM')
    READ (5,210) ZEZ
210  FORMAT (20A4)
    CALL CIST
5    CONTINUE
    TYPE 230
230  FORMAT(1X)
    TYPE 240
240  FORMAT ('KAKAV IZLAZ ZELITE: 1.TERMINAL 2.TERMINAL I STAMPAC: ', $)
    READ (5,250) IZLAZ
250  FORMAT(I5)
    IF (IZLAZ.EQ.1) GO TO 300
    TYPE 260
260  FORMAT (' OTKIJCajte IME PROJEKTA (NAJVIŠE 9 ZNAKOVA): ', $)
    READ (5,211) NASLOV
211  FORMAT(13A1)
    DO 7777 I=1,9
    IF(NASLOV(I).EQ.BL) GO TO 7778
7777  CONTINUE I = 10
7778  NASLOV(I) =LST(1) NASLOV(I+1)=LST(2)
    NASLOV(I+2)=LST(3) NASLOV(I+3)=LST(4)
C
    CALL ASSIGN (6, NASLOV) C
    DO 7779 I=1,13
    FILE(4+I)=NASLOV(I)
7779  CONTINUE
    TYPE 220
220  FORMAT (' MOLIMO VAS OTKIJCajte VASE, IME, ')

    READ (5,210) IME WRITE(6,6) IME
6    FORMAT(1X,20A4)
300  CONTINUE
    TYPE 301
301  FORMAT('/ DA LI IMATE DATOTEKU SA ULAZnim PODACIMA: ',
*      ' I. DA 2. NE > ', $)
    ACCEPT 250, IUL
    IF (IUL.EQ.2) GO TO 309 C
    TYPE 501
501  FORMAT (' UNESITE IME DATOTEKE > ', $)
    ACCEPT 211, NASLOV
    DO 560 I=1,9
    IF(NASLOV(I).EQ.BL) GO TO 512
560  CONTINUE
    I = 10
512  DO 513 J=I,4 NASLOV(I+J-1)=DAT(J)
513  CONTINUE
    CALL ASSIGN (1, NASLOV) C
    READ(I,1) M, N
1    FORMAT(2 I8) DO 570 I=1, N READ(1,2) (C(I,J), J=1,5)
2    FORMAT(8F10.0) FLAG(I)=0
570  CONTINUE
    READ(1,2) (TS(I), I=2, M)
    GO TO 29 C
309  TYPE 230 TYPE 310
310  FORMAT (' KOLIKI JE MAKSIMALNI BROJ DOGADJAJA > ', $) READ (5,250) M
    TYPE 230
    TYPE 320
320  FORMAT (' KOLIKI JE MAKS. BROJ AKTIVNOSTI UKLJUCUJUCI I VESTACKE > ', $)
```

```
READ (5,250) N C
DO 25 I=1,N
CALL CIST
TYPE 330, I
330 FORMAT(' UNOSENJE PODATAKA O ',I3,',. AKTIVNOSTI' //)
TYPE 340
340 FORMAT(' POCETNI DOGADJAJ AKTIVNOSTI >', $)
READ (5,350) C(I,1)
350 FORMAT(F10.0)
TYPE 360
360 FORMAT(' ZAVRSNI DOGADJAJ AKTIVNOSTI >', $)
READ (5,350) C(I,2)
TYPE 370
370 FORMAT(' OPTIMISTICKO VREME TRAJANJA >', $)
READ (5,350) C(I,3)
TYPE 380
380 FORMAT(' NAJVEROVATNIJE VREME TRAJANJA >', $)
READ (5,350) C(I,4)
TYPE 390
390 FORMAT(' PESIMISTICKO VREME TRAJANJA >', $)
READ (5,350) C(I,5)
FLAG(I)=0
25 CONTINUE
C
CALL CIST
DO 650 I=2,M
TYPE 610 , I
610 FORMAT(' PLANIRANI ROK ODIGRAVANJA ZA DOGADJAJ ',I2,' >', $)
READ (5,350) TS(I)
650 CONTINUE
C
KORAK 1
DO 30 I=1,N
C(I,6) = (C(I,3) + 4*C(I,4) + C(I,5)) / 6
C(I,7) = (C(I,5)*C(I,5) - 2*C(I,5)*C(I,3) + C(I,3)*C(I,3)) / 36
30 CONTINUE
CALL CIST
TYPE 35
DO 400 I=1,N
TYPE 45, (C(I,J), J=1,7)
TYPE 405
405 FORMAT('2MOLIMO VAS PRITISNITE TIPKU RETURN', $)
READ (5,210) ZEZ
CALL CIST
IF (IZLAZ.EQ.1) GO TO 4.10
WRITE(6,35)
35 FORMAT(7X, 'I,9X, 'J', 'AT(I,J) MT(I,J) BT(I,J) ET(I,J) SIG(I,J)' //)
DO 40 I=1,N
40 WRITE (6, 45) (C(I, J), J=1,7)
45 FORMAT (7F10.3)
410 CONTINUE
C
KORAK 2
IZRACUNATI NAJRANIJE VREME NASTUPANJA DOGADJAJA J TE(J)
TE(1)=0.
SIGTE(1)=0.
DO 50 J=2, M
TMAX=0.
SIGMAX=0.
DO 55 K=1,N
IF(C(K,2).NE.J) GO TO 55
TE(J) = TE(C(K,1)) + C(K,6)
SIGTE(J) = SIGTE(C(K,1)) + C(K,7)
IF(TE(J).LE.TMAX) GO TO 55
TMAX=TE(J)
SIGMAX = SIGTE(J)
55 CONTINUE
TE(J)=TMAX
SIGTE(J)=SIGMAX
50 CONTINUE
C
KORAK 3
IZRACUNATI NAJKASNIJE VREME NASTUPANJA DOGADJAJA J TL(J)
TL(M)=TE(M)
C
TS(M)=TL(M)
DO 60 IF=2*M
I=M-IF+1
TMIN=100000.
DO 65 KF=1,N
K=N-KF+1
IF(C(K,1).NE.I) GO TO 65
TL(I) = TL(C(K,2)) - C(K,6)
IF(TL(I).GE.TMIN) GO TO 65
TMIN=TL(I)
65 CONTINUE
TL(I)=TMIN
60 CONTINUE
```

MAŠINSKI FAKULTET NIŠ - PROGRAMSKI PAKETI 2007/2008  
dr Miomir Jovanović, redovni profesor

```
C      KORAK 4
C      IZRACUNATI VREMENSKU REZERVU ZA SVAKI DOGADJAJ J SE(J)
70     DO 70 J=1,M
       SE(J)=TL(J)-TE(J)
       TYPE 420
420    FORMAT(5X,'DOGADJAJ J',7X,'TE(J)',10X,'TL(J)',10X,'SE(J)')
       DO 440 J=1,M
       TYPE 430,J,TE(J),TL(J),SE(J)
430    FORMAT(7X,I5,3F15.3)
440    CONTINUE
       TYPE 405
       READ (5,210) ZEZ
       CALL CIST
       IF (IZLAZ.EQ.1) GO TO 450
       WRITE(6,75)
75     FORMAT( // 5X,'DOGADJAJ J',7X,'TE(J)',10X,'TL(J)',10X,'SE(J)')
       DO 80 J=1,M
80     URITE (6,85)J,TE(J),TL(J),SE(J)
85     FORMAT(/ 7X,I5,3F15.3)
450    CONTINUE
C
C      KORAK 5
C      NACI AKTIVNOSTI NA KRITICNOM PUTU
90     DO 90 K=1,N
       I=C(K,1)
       J=C(K,2)
       IF (ABS(TL(I)-TE(I)-SE(M)).GT..0001) GO TO 90
       IF (ABS(TL(J)-TE(J)-SE(M)).GT..0001) GO TO 90
       IF (ABS(TE ( J)-TE(I)-TL(J)+TL(I)).GT..0001.OR.ABS(TL(J)-TL(I)-C(K,6) * ).GT..0001) GO TO 90
90     FLAG(K)=1
       CONTINUE
       KRPUT(1)=1
       KP=1
       DO 100 K=1,N
       I=C(K,1)
       J=C(K,2)
       IF (FLAG(K).EQ.0) GO TO 100
       IF (I.NE.KRPUT(KP)) GO TO 100
       KP=KP+1
       KRPUT(KP)=J
100    CONTINUE
       TYPE 460,(KRPUT(I),I=1,KP)
460    FORMAT(////' KRITICNI PUT',15I4//)
       TYPE 405
       READ (5,210) ZEZ
       CALL CIST
       IF (IZLAZ.EQ.1) GO TO 500
       WRITE(6,105) (KRPUT(I),I=1,KP)
105    FORMAT« // 5X,'KRITICNI PUT',15I4)
500    CONTINUE
C
C      KORAK 6
110    DO 110 K=2,M
       Z(K) = (TS (K) -TE (K) ) /SQRT (SIGTE (K))
       TYPE 510
510    FORMAT(5X,'DOGADJAJ',9X,'TE',13X,'TS',10X,'SIGTE',I3X,'Z')
       DO 530 K*2»M
       TYPE 520 ,K,TE(K),TS(K),SIGTE(K),Z(K)
520    FORMAT (7X ,I3,4 F15.3)
530    CONTINUE
       IF (IZLAZ.EQ.1) GO TO 540
       WRITE (6,111)
111    FORMAT ( // 5X,'DOGADJAJ',9X,'TE',13X,'TS',10X,'SIGTE',13X,'Z')
       DO 115 K=2, M
115    WRITE(61,120)K,TE(K),TS(K),SIGTE(K),Z(K)
120    FORMAT(/ 7X,I3,4F15.3)
540    CONTINUE
       TYPE 405
       READ (5,210) ZEZ
       IF(IZLAZ.EQ.1) STOP
       CALL CLOSE(6)
       CALL MCR(FILE,17)
2000   STOP
       END
```

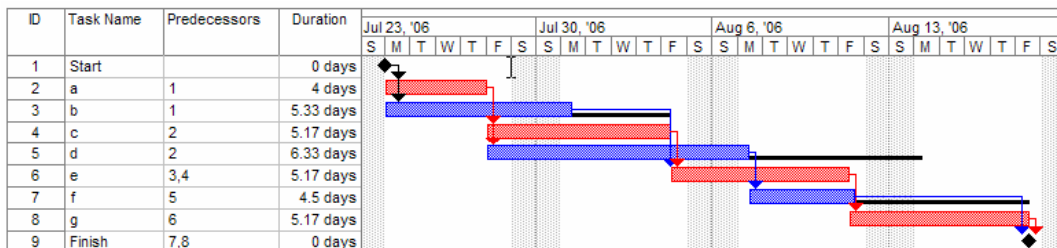
## Program Evaluation and Review Technique

From Wikipedia, the free encyclopedia

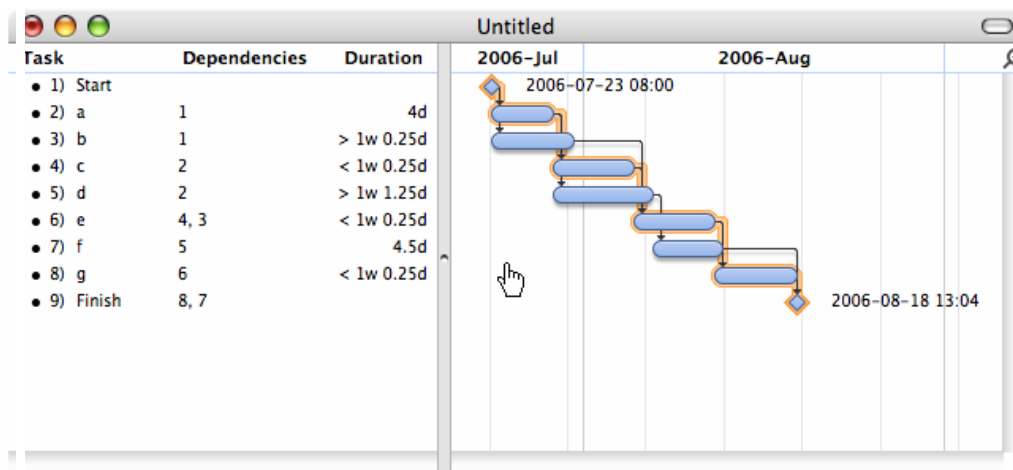
In the following example there are seven tasks, labeled *a* through *g*. Some tasks can be done concurrently (*a* & *b*) while others cannot be done until their predecessor task is complete (*c* cannot begin until *a* is complete). Additionally, each task has three time estimates: the optimistic time estimate (*a*), the most likely or normal time estimate (*m*), and the pessimistic time estimate (*b*). The expected time ( $T_E$ ) is computed using the formula  $(a + 4m + b)/6$ .

Activity	Predecessor	Opt. a	Norm. m	Pess. b	$T_E$ $(a + 4m + b)/6$
a	--	2	4	6	4.00
b	--	3	5	9	5.33
c	a	4	5	7	5.17
d	a	4	6	10	6.33
e	b, c	4	5	7	5.17
f	d	3	4	8	4.50
g	e	3	5	8	5.17

Once this step is complete, one can draw a [Gantt chart](#) or a [network diagram \(project management\)](#).



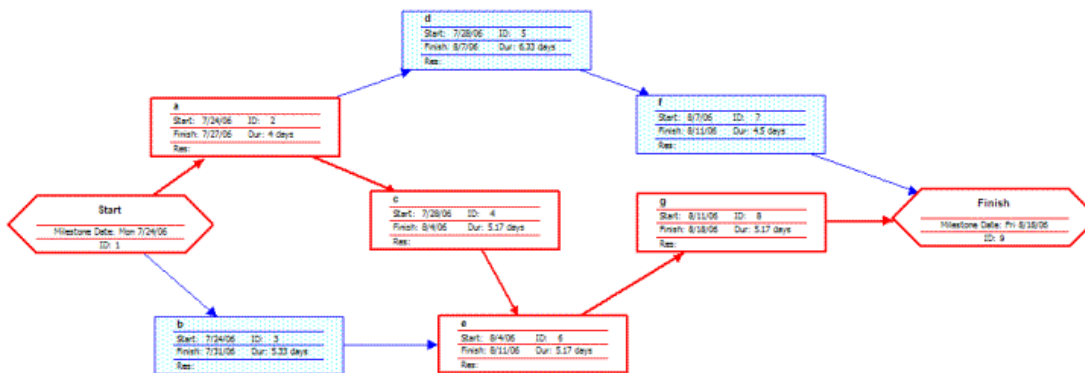
A Gantt chart created using [Microsoft Project \(MSP\)](#). Note (1) the [critical path](#) is in red, (2) the [slack](#) is the black lines connected to non-critical activities, (3) when using MSP, you must use the task ID when labeling predecessor activities, and (4) since Saturday and Sunday are not work days (as described above) some bars on the Gantt chart are longer if they cut through a weekend.





A Gantt chart created using [OmniPlan](#). Note (1) the [critical path](#) is highlighted, (2) the [slack](#) is not specifically indicated on task 5 (d), though it can be observed on tasks 3 and 7 (b and f), (3) when using OmniPlan, you may use the [GUI](#) to easily link dependencies, or you may enter them by reference to task ID, and (4) since weekends are indicated by a thin vertical line, and take up no additional space on the work calendar, bars on the Gantt chart are not longer or shorter when they do or don't carry over a weekend.

A network diagram can be created by hand or by using software such as [Microsoft Project](#). There are two types of network diagrams, activity on arrow (AOA) and activity on node (AON). Activity on node diagrams are generally easier to create and interpret. To create an AON diagram, it is recommended (but not necessary) to start with a node named *start*. This "activity" has a duration of zero (0). Then you draw each activity that does not have a predecessor activity (*a* and *b* in this example) and connect them with an arrow. Next, since both *c* and *d* list *a* as a predecessor activity, their nodes are drawn with arrows coming from *a*. Activity *e* is listed with *b* and *c* as predecessor activities, so node *e* is drawn with arrows coming from both *b* and *c*, signifying that *e* cannot begin until both *b* and *c* have been completed. Activity *f* has *d* as a predecessor activity, so an arrow is drawn connecting the activities. Likewise, an arrow is drawn from *e* to *g*. Since there are no activities that come after *f* or *g*, it is recommended (but again not necessary) to connect them to a node labeled *finish*.



The first Gantt Chart was developed by [Karol Adamiciecki](#), who called it a *Harmonogram*. Because Adamiciecki did not publish his chart until 1931, this famous chart bears Gantt's name. [Henry Gantt](#) (1861–1919) designed his chart in 1910. (See "Work, Wages and Profit" by H. L. Gantt, published by *The Engineering Magazine*, [New York](#), 1910; republished as *Work, wages, and profits*, Hive Publishing Company, Easton, Pennsylvania, 1974, [ISBN 0879600489](#)).